

# Teoria da Computação

## Máquinas com Pilhas

Cristiano Lehrer, M.Sc.

# Introdução

- A Máquina com Pilhas diferencia-se das Máquinas de Turing e de Post principalmente pelo fato de possuir uma memória de entrada separada das memórias de trabalho e de saída.
- Essas estruturas auxiliares são do tipo pilha, e cada máquina possui zero ou mais pilhas.
- Pilhas constituem um tipo de estrutura de dados usado em Ciência da Computação há algum tempo.
- Entretanto, somente na década de 60, o modelo de Máquina com Pilhas foi formalizado e devidamente estudado.

# Pilhas versus Poder Computacional (1/3)

- Máquina Finita
  - Uma Máquina Finita, que corresponde a uma Máquina Sem Pilhas, possui um poder computacional relativamente restrito, pois não tem memória auxiliar para armazenar informações de trabalho.
  - Por exemplo, não existe Máquina Sem Pilhas capaz de reconhecer um duplo balanceamento como em  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ .
  - Entretanto, é uma classe de máquinas de fundamental importância no estudo das Linguagens Formais, como em editores de textos e analisadores léxicos.

# Pilhas versus Poder Computacional (2/3)

- Máquina com Uma Pilha
  - A Classe das Máquinas com Uma Pilha, embora mais poderosa que a Classe das Máquinas Finitas, ainda possui uma capacidade computacional restrita.
  - Por exemplo, não existe Máquinas com Uma Pilha capaz de reconhecer um triplo balanceamento, como em  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ .
  - Entretanto, também é uma classe de máquinas de fundamental importância no estudo das Linguagens Formais, como em compiladores de linguagens do tipo Pascal.

# Pilhas versus Poder Computacional (3/3)

- Máquina com Duas Pilhas
  - A Classe das Máquinas com Duas Pilhas possui o mesmo poder computacional que a Classe das Máquinas de Turing ou de Post.
- Máquina com Mais de Duas Pilhas
  - A Classe das Máquinas com Mais de Duas Pilhas possui o mesmo poder computacional que a Classe das Máquinas com Duas Pilhas, ou seja, para qualquer máquina com mais de duas pilhas, é possível construir uma equivalente com, no máximo, duas pilhas que realiza o mesmo processamento.

# Componentes

- Uma Máquina com Pilhas consiste, basicamente, de três partes:
  - Variável  $X$ 
    - Trata-se de uma variável de entrada, similar à da Máquina de Post, mas usada somente para entrada.
  - Variáveis  $Y_i$ 
    - Trata-se de variáveis do tipo pilha, e são utilizadas como memória de trabalho e de saída.
  - Programa
    - É uma sequência finita de instruções e é representado como um diagrama de fluxos (espécie de fluxograma), onde cada vértice é uma instrução.
    - As instruções podem ser de cinco tipos:
      - partida, parada, desvio, empilha e desempilha

## Variável X

- A variável X não possui tamanho nem limites fixos.
- Os símbolos pertencem ao alfabeto de entrada.
- Inicialmente, o valor de X é a palavra de entrada e seu comprimento é igual ao comprimento da palavra corrente armazenada.
- Caso X não contenha símbolos, a entrada é vazia, representada pela palavra vazia  $\{\epsilon\}$ .

# Variáveis $Y_i$

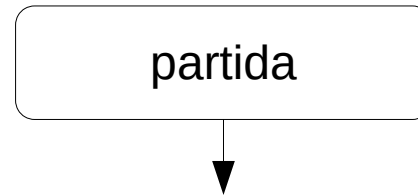
- As variáveis  $Y_i$ , em número variável, mas finito, também não possuem tamanho nem limites fixos, e os símbolos pertencem ao alfabeto de entrada (não existem símbolos auxiliares).
- Inicialmente, o valor de cada pilha  $Y_i$  é a palavra vazia, e seu comprimento, é igual ao comprimento da palavra corrente armazenada.
- É importante observar que, embora os modelos Máquina de Post e Máquina com Pilhas possuam alguma semelhança, existe uma grande diferença na forma de manipular seus dados.
- Na Máquina de Post, em uma fila, pode-se ler (e remover) símbolos em uma extremidade e armazenar na outra. Assim, os dados circulam.
- Em uma Máquina com Pilhas, o armazenamento e leitura (e remoção) é sempre na mesma extremidade.



# Componentes do Programa (1/4)

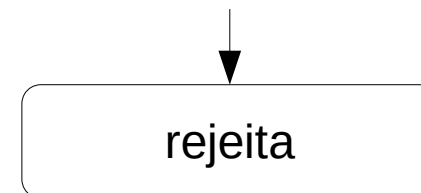
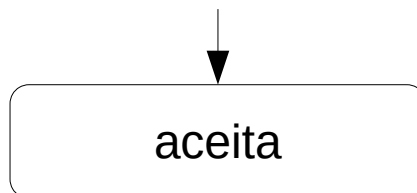
- Partida

- Existe somente uma instrução de início (partida) em um programa.



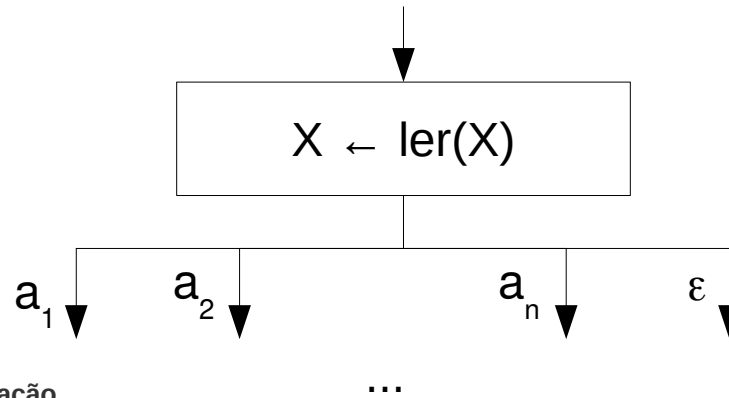
- Parada

- Existem duas alternativas de instruções de parada em um programa, uma de aceitação (aceita) e outra de rejeição (rejeita).



## Componentes do Programa (2/4)

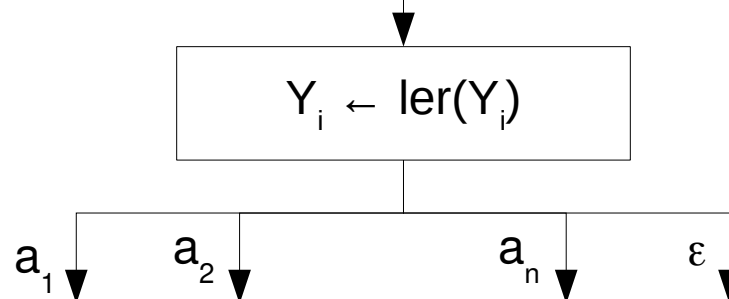
- Desvio ou Teste
  - Determina o fluxo do programa de acordo com o símbolo mais à esquerda da palavra armazenada na variável  $X$  (início da fila).
  - Também deve ser prevista a possibilidade de  $X$  conter a palavra vazia.
  - Portanto, é um desvio condicional, e trata-se de uma função total, ou seja, definida para todos os valores do domínio.
  - Assim, se o cardinal de  $\Sigma$  é  $n$ , então existem  $n+1$  arestas de desvios condicionais, pois se deve incluir a possibilidade de  $\varepsilon$ .
  - $X \leftarrow \text{ler}(X)$  denota uma leitura destrutiva, ou seja, que lê o símbolo mais à esquerda da palavra, retirando da mesma o símbolo lido.



## Componentes do Programa (3/4)

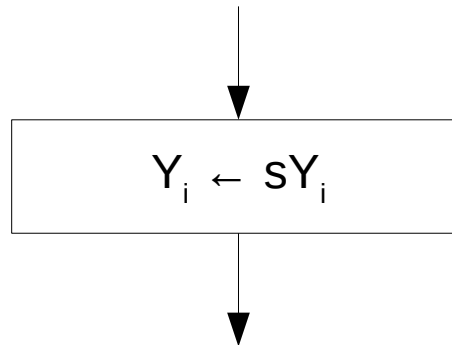
- Desempilha

- Determina o fluxo do programa de acordo com o símbolo no topo da pilha  $Y_i$ .
- Também deve ser prevista a possibilidade de  $Y_i$  conter a palavra vazia.
- Portanto, é um desvio condicional, e trata-se de uma função total, ou seja, definida para todos os valores do domínio.
- Assim, se o cardinal de  $\Sigma$  é  $n$ , então existem  $n+1$  arestas de desvios condicionais, pois se deve incluir a possibilidade de  $\epsilon$ .
- $Y_i \leftarrow \text{ler}(Y_i)$  denota uma leitura destrutiva, ou seja, que lê o símbolo do topo de  $Y_i$ , retirando da estrutura o símbolo lido.



## Componentes do Programa (4/4)

- Empilha
- Empilha um símbolo (pertencente a  $\Sigma$ ) no topo da pilha indicada, ou seja, concatena o símbolo na extremidade da palavra armazenada na variável  $Y_i$ .



# Definição

- Uma Máquina com Pilhas é uma dupla

$$M = (\Sigma, D)$$

- $\Sigma$  alfabeto de símbolos de entrada
- Programa ou diagrama de fluxos, construídos a partir de componentes elementares denominados partida, parada, desvio, empilha e desempilha.

# Observações

- Em um diagrama de fluxos, existe somente uma instrução de partida, mas podem existir diversas (zero ou mais) instruções de parada, tanto de aceitação como de rejeição.
- Uma palavra de entrada é aceita ou rejeitada, se a computação, iniciada com a variável  $X$ , contendo a entrada, atingir uma instrução aceita ou rejeita, respectivamente.
- É perfeitamente possível uma Máquina com Pilhas ficar em loop infinito.
- Em uma instrução de desvio ou desempilha, se  $X$  ou  $Y_i$  contém a palavra vazia, então segue o fluxo correspondente.
- Caso contrário, lê o símbolo mais à esquerda de  $X$  ou no topo de  $Y_i$  e o remove, após a decisão de qual aresta do fluxo indica a próxima instrução.